➢ **المتغير العشوائي :**

متغير عشوائي X هو دالة عددية معرفة على مجموعة مخارج E و مزودة باحتمال P .

X يأخذ القيم X_1 ، X_2 ،... ، X_n بالإحتمالات P_1 ، P_2 ،... ، P_n .

➢ **الأمل الرياضي للمتغير العشوائي :**

$$\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n}X_iP(X_i)}$$

➢ **التباين :**

$$\boxed{Var(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(E(X_i)-X_i\right)^2P(X_i)}$$

➢ **الإنحراف المعياري:**

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}}$$

الأعداد المركبة

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ C .

كل عدد مركب من C يكتب على الشكل : $z=x+iy$ حيث : x ، y أعداد حقيقية .

i: عدد تخيلي معرف بـ $i^2=-1$.

x : الجزء الحقيقي نرمز له بـ $\mathrm{Re}(z)$.

y : الجزء التخيلي نرمز له بـ $\mathrm{Im}(z)$.

$z=x+iy$ هو الشكل الجبري لـ عدد مركب .

- **حالات خاصة :**

- z عدد مركب معدوم معناه $\mathrm{Re}(z)=0$ و $\mathrm{Im}(z)=0$.
- z عدد مركب حقيقي معناه $\mathrm{Im}(z)=0$.
- z عدد مركب تخيلي صرف معناه $\mathrm{Re}(z)=0$.

➢ **مرافق عدد مركب :**

$z=x+iy$ مرافقه $\bar{z}=x-iy$

- إذا كان $z=\bar{z}$ فإن z عدد مركب حقيقي .
- إذا كان $\bar{z}=-z$ فإن z عدد مركب تخيلي صرف .

$z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$	$z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$	$z\times\bar{z}=\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)$

- **خواص المرافق :**

z و z' عددان مركبان .

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$ ، $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$ ، $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ ، $\overline{z^n}=\bar{z}^n$ ، $\bar{\bar{z}}=z$.

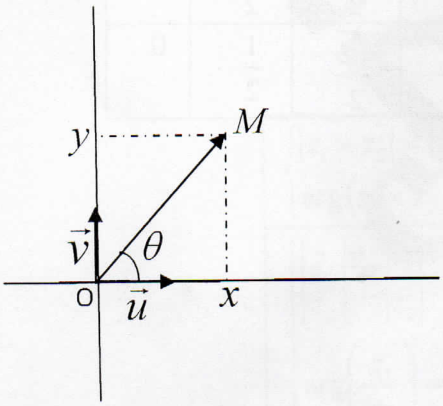
- **التفسير الهندسي لعدد مركب :**

عدد مركب $z=x+iy$ يسمى بلاحقة نقطة $M(x;y)$ و M هي صورة العدد المركب z .

- إذا كانت لدينا نقطة A لاحقتها z_A و نقطة B لاحقتها z_B فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ لاحقته z_B-z_A .

- **طويلة و عمدة عدد مركب :**

- **طويلة عدد مركب:**



في المستوي المركب $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقطة $M(x;y)$ صورة العدد المركب $z=x+iy$.

$\overrightarrow{OM}=x\vec{u}+y\vec{v}$

- **طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$:**

$\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$ هي طويلة العدد المركب z نرمز لها بالرمز $|z|$ و منه $|z|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)}$.

$$\boxed{z\times\bar{z}=|z|^2}$$

- إذا كانت لدينا نقطة A لاحقتها z_A و نقطة B لاحقتها z_B

التفسير الهندسي لـ $|z_B-z_A|$ هو طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=|z_B-z_A|$.

- **عمدة عدد مركب:**

الزاوية $\theta=\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ هي عمدة العدد المركب z نرمز لها بالرمز $\arg(z)$ و منه $\arg(z)=\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$

حيث : $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x}{|z|}\\ \sin\theta=\dfrac{y}{|z|}\end{cases}$

❖ نعتبر نقطة A لاحقتها z_A و نقطة B لاحقتها z_B و نقطة C لاحقتها z_C :

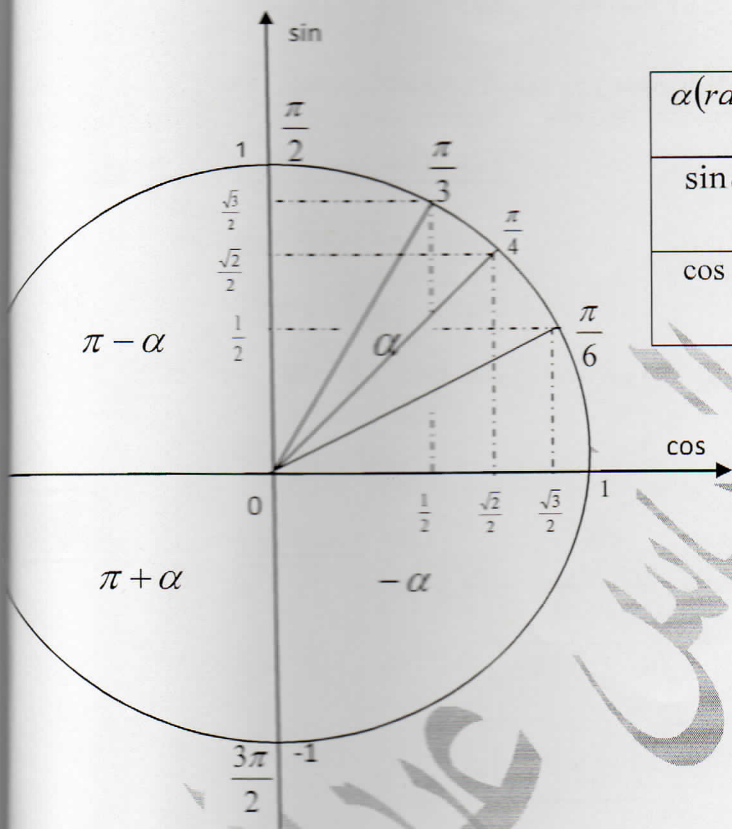
- التفسير الهندسي لـ $\arg(z_B-z_A)$ هو قيس الزاوية الموجهة $\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)$
- التفسير الهندسي لـ $\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)$ هو قيس الزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$.

الشكل المثلثي لعدد مركب : $z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i\sin\theta)$

الشكل الأسي لعدد مركب : $z = \lvert z\rvert e^{i\theta}$

➢ **تذكير:**

• **الدائرة المثلثية :**



$\alpha(rad)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

حالات خاصة :

$a \in IR^*$; $z = a$ يكتب على الشكل الأسي :
$$\begin{cases} z = ae^{i(0)} & a \succ 0 \\ \text{أو} & \\ z = -ae^{i(\pi)} & a \prec 0 \end{cases}$$

$a \in IR^*$; $z = ai$ يكتب على الشكل الأسي :
$$\begin{cases} z = ae^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} & a \succ 0 \\ \text{أو} & \\ z = -ae^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} & a \prec 0 \end{cases}$$

- **معادلات من الدرجة الثانية ذات معاملات حقيقية:**

$az^2+bz+c=0$ مع a ، b و c أعداد حقيقية حيث: $a\neq 0$.

نسمي مميز المعادلة العدد الحقيقي : $\Delta = b^2-4ac$.

- في حالة $\Delta \succ 0$ لدينا حلان حقيقيان متمايزان : $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- في حالة $\Delta = 0$ لدينا حل حقيقي مضاعف : $z_1=z_2=\dfrac{-b}{2a}$
- في حالة $\Delta \prec 0$ لدينا حلان مركبان مترافقان : $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ، $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

- **المرجح:**

نعتبر α ، β و γ أعداد حقيقية حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

إذا كانت لدينا النقط A ، B و C ذات اللواحق z_A ، z_B ، z_C على الترتيب فإن لاحقة

النقطة G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$ هي :

$$\boxed{z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}}$$

- **منتصف قطعة:**

إذا كانت لدينا النقطتان A و B ذات اللاحقتان z_A و z_B على الترتيب

فإن لاحقة النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ هي : $\boxed{z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}}$

- **التوازي و التعامد:**

نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق z_A ، z_B ، z_C ، z_D على الترتيب

- إذا كان $\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_C}$ عدد حقيقي فإن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متوازيان.
- إذا كان $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ عدد حقيقي فإن النقط A ، B ، C على إستقامية .
- إذا كان $\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_C}$ عدد تخيلي صرف فإن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدان.

- **النقط من نفس الدائرة:**

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق z_A ، z_B ، z_C على الترتيب

- إذا كان $|z_C|=|z_B|=|z_A|$ فإن A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $|z_A|$.
- إذا كان ABC مثلث قائم فإن A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي قطرها وتر المثلث ABC .
- إذا كان ABC مثلث متقايس الأضلاع فإن A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها مركز ثقل المثلث ABC
- إذا كان ABC مثلث كيفي فإن A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها نقطة تقاطع محاور المثلث ABC .

➢ **طبيعة مثلث:** نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق z_A ، z_B ، z_C ، على الترتيب

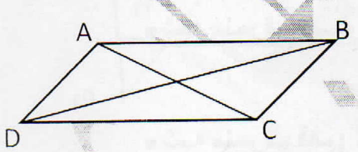
حيث: $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = re^{i\theta}$ معناه $\begin{cases} \|\overrightarrow{AB}\| = r\|\overrightarrow{AC}\| \\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = \theta \end{cases}$ مع $r \in IR_+^*$ و $\theta \in IR$

إذا كان $r = 1$ و $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$	فإن المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين .
إذا كان $r \neq 1$ و $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$	فإن المثلث ABC قائم في A .
إذا كان $r = 1$ و $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$ و $\theta \neq \pm\frac{\pi}{3}$	فإن المثلث ABC متساوي الساقين .
إذا كان $r = 1$ و $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$	فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع .
إذا كان $r = \sqrt{2}$ و $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$	فإن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين .
إذا كان $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$	فإن المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين .
إذا كان $r = 2$ و $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$	فإن المثلث ABC قائم في C.
إذا كان $r = \frac{1}{2}$ و $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$	فإن المثلث ABC قائم في B .
إذا كان $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ و $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$	فإن المثلث ABC قائم في C .
إذا كان $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$	فإن المثلث ABC قائم في B .

➢ **طبيعة رباعي:** نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق z_A ، z_B ، z_C ، z_D على الترتيب

• **متوازي الأضلاع :**

➢ في متوازي الأضلاع القطران متناصفان .

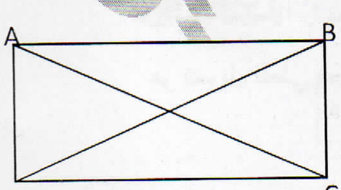


$ABCD$ متوازي الأضلاع

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$

• **مستطيل:**

➢ في مستطيل القطران متساويان و متناصفان .



$ABCD$ مستطيل

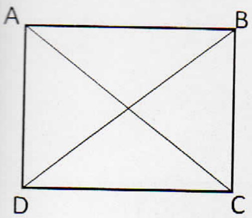
$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ (القطران متناصفان)

و

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\theta}, \theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$ (القطران متساويان غير متعامدان).

- **مربع:**

➢ في مربع القطران متساويان و متناصفان و متعامدان .

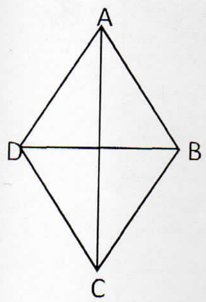


$ABCD$ مربع

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$ (القطران متناصفان)

و

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = e^{i\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)}$$ (القطران متعمدان و متساويان).



- **معين :**

في معين القطران متناصفان و متعامدان .

$ABCD$ معين

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$ (القطران متناصفان)

و

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = ke^{i\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)}, k \in IR_+^* - \{1\}$$ (القطران متعمدان غير متساويان).

- **شبه منحرف :**

شبه منحرف له فقط ضلعين متقابلين متوازيين (القطران غير متناصفان).

$ABCD$ شبه منحرف

$$z_B - z_A = k(z_C - z_D), k \in IR_+^* - \{1\}.$$

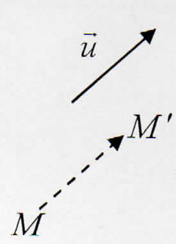
- **شبه منحرف متساوي الساقين:** هو شبه منحرف فيه الضلعان الغير المتوازيان متساويان في الطول.

- **شبه منحرف قائم:** هو شبه منحرف أحد ساقيه عمودي على القاعدتين.

التحويلات النقطية :

➢ الانسحاب :

هو تحويل نقطي يحول النقطة M إلى النقطة M' بالعلاقة : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ حيث $\vec{u}$ هو شعاع الانسحاب مع $\vec{u} \neq \vec{0}$.



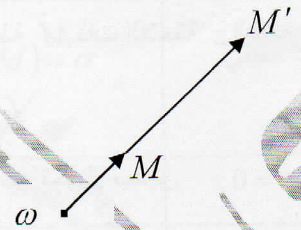
▪ **العبارة باستعمال الأعداد المركبة:**

نعتبر M صورة z و M' صورة z' و $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ صورة b ،عبارة الانسحاب باستعمال الأعداد المركبة:

$$\boxed{z' = z + b}$$

➢ **التحاكي :**

هو تحويل نقطي يحول النقطة M إلى النقطة M' بالعلاقة : $\overrightarrow{\omega M'} = k\overrightarrow{\omega M}, k \in IR^* - \{1\}$ حيث k هو نسبة التحاكي و ω مركز التحاكي .



▪ **العبارة باستعمال الأعداد المركبة:**

نعتبر M صورة z و M' صورة z' و ω صورة z_0 ،عبارة التحاكي باستعمال الأعداد المركبة:

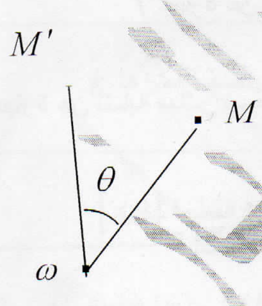
$$\boxed{z' = kz + (1-k)z_0}$$

➢ **الدوران :**

هو تحويل نقطي يحول النقطة M إلى النقطة M' بالعلاقة :

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{\omega M'}\right\| = \left\|\overrightarrow{\omega M}\right\| \\ \left(\overrightarrow{\omega M}; \overrightarrow{\omega M'}\right) = \theta, \theta \in IR \end{cases}$$

حيث θ هي زاوية الدوران و ω مركز الدوران .



▪ **العبارة باستعمال الأعداد المركبة:**

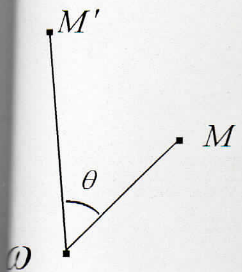
نعتبر M صورة z و M' صورة z' و ω صورة z_0 ،عبارة الدوران باستعمال الأعداد المركبة:

$$\boxed{z' = e^{i\theta}z + \left(1 - e^{i\theta}\right)z_0}$$

⮚ التشابه المباشر :

هو تحويل نقطي يحول النقطة M إلى النقطة M' بالعلاقة : $\begin{cases} \left\|\overrightarrow{\omega M'}\right\| = k\left\|\overrightarrow{\omega M}\right\|, k \in IR_+^* - \{1\} \\ \left(\overrightarrow{\omega M};\overrightarrow{\omega M'}\right) = \theta, \theta \in IR \end{cases}$

حيث θ هي زاوية التشابه و ω مركز التشابه و k هو نسبة التشابه.



⮚ العبارة باستعمال الأعداد المركبة:

نعتبر M صورة z و M' صورة z' و صورة z_0 ،عبارة التشابه المباشر

باستعمال الأعداد المركبة:

$$\boxed{z' = ke^{i\theta}z + \left(1 - ke^{i\theta}\right)z_0}$$

- **خلاصة:**

نعتبر f التحويل النقطي الذي يرفق لكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' و a ، b

عددان مركبان حيث : $f : z' = a z + b$

- $a = 1$:
  - $b = 0$: f عبارة عن تحويل مطابق
  - $b \neq 0$: f عبارة عن انسحاب شعاعه $\vec{u}$ صورة b
- $a \in IR^* - \{1\}$: f عبارة عن تحاكي نسبته a ومركزه ω النقطة الصامدة
- $a \in C - \{1\}$:
  - $|a| = 1$: f عبارة عن دوران زاويته $\arg(a)$ ومركزه ω النقطة الصامدة
  - $|a| \neq 1$: f عبارة عن تشابه مباشر نسبته $|a|$ وزاويته $\arg(a)$ ومركزه ω النقطة الصامدة

- **ملاحظة :** بالنسبة لـ ω هي النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\boxed{z_0 = \frac{b}{1-a}}$

⮚ التركيب بين التحاكي و الدوران :

نعتبر h تحاكي نسبته k مع $k \in IR^* - \{1\}$ ومركزه ω ، r دوران زاويته θ مع $\theta \in IR$ و مركزه ω

- في حالة $k \succ 0$ ، $h \circ r$ أو $r \circ h$: عبارة عن تشابه مباشر نسبته k و زاويته θ و مركزه ω.
- في حالة $k \prec 0$ ، $h \circ r$ أو $r \circ h$: عبارة عن تشابه مباشر نسبته $(-k)$ و زاويته $(\theta \pm \pi)$ و مركزه ω

- **التركيب في التشابه المباشر :**

> إذا كان S تتشابه مباشر نسبته k مع $k\in IR_+^*$ ومركزه ω وزاويته θ مع $\theta\in IR$ فإن $\underbrace{S\circ S\circ\cdots\circ S}_{n\ \text{مرة}}$ عبارة عن تشابه مباشرنسبته k^n ومركزه ω وزاويته $n\theta$.

- **مجموعة النقط :**

نعتبر M نقطة متغيرة ذات اللاحقة z و النقطتين A ، B ذات اللاحقتين على الترتيب z_A ، z_B.

مجموعة النقط M	تفسير هندسي	طبيعة المجموعة
$\lvert z-z_A\rvert=k$ مع k ثابت حقيقي موجب تماما	$\lVert\overrightarrow{AM}\rVert=k$	دائرة مركزها A و نصف قطرها k
$\arg(z-z_A)=\alpha$ مع α ثابت حقيقي	$(\vec{u};AM)=\alpha$	نصف مستقيم مبدؤه A وميله $\tan(\alpha)$ ماعدا النقط A في حالة $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$: نصف مستقيم عمودي مبدؤه A معادلته $x=\text{Re}(z_A)$ ماعدا النقطة A
$\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$	$\lVert\overrightarrow{AM}\rVert=\lVert\overrightarrow{BM}\rVert$	محور القطعة $[AB]$
$z=ke^{i\theta}+z_A$ k يتغيرفي IR_+ و θ عدد حقيقي ثابت	$\begin{cases}\lVert\overrightarrow{AM}\rVert=k\\(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\theta\end{cases}$	نصف مستقيم مبدؤه A وميله $\tan(\theta)$ في حالة $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$: نصف مستقيم عمودي مبدؤه A معادلته $x=\text{Re}(z_A)$
$z=ke^{i\theta}+z_A$ k يتغيرفي IR و θ عدد حقيقي ثابت	$\lVert\overrightarrow{AM}\rVert=\lvert k\rvert$ $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\theta+k'\pi,k'\in Z$	مستقيم يشمل A وميله $\tan(\theta)$ في حالة $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$: مستقيم عمودي يشمل A معادلته $x=\text{Re}(z_A)$
$z=ke^{i\theta}+z_A$ θ يتغيرفي IR و k عدد حقيقي ثابت	$\begin{cases}\lVert\overrightarrow{AM}\rVert=k\\(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\theta\end{cases}$	دائرة مركزها A و نصف قطرها k
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=0$	$(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=0$	مستقيم (AB) ماعدا القطعة $[AB]$
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\pi$	$(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\pi$	القطعة المستقيمة $[AB]$ ماعدا النقطتين A و B
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=k\pi,k\in Z$	$\begin{cases}(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=0\\ \text{أو}\\(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\pi\end{cases}$	مستقيم (AB) ماعدا النقطتين A و B
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}$	$(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}$	نصف دائرة قطرها AB ماعدا النقطتين A و B
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}$	$(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{2}$	نصف دائرة قطرها AB ماعدا النقطتين A و B